• SUJET DE SECOURS : utilisé le 19/5/15 à l'EC 221 (Maths)

UNIVERSITE DES ANTILLES ET DE LA GUYANE
ESPE DE L'ACADEMIE DE GUADELOUPE
ANNEE 2014-15

MASTER MEEF PARCOURS : PLC Mathématiques

EXAMEN EC132 session ~~2~~ Session 1

Durée : 2 heure - Code apogée : ~~LP77ALG1~~ EC 221

Les documents (livres, notes de cours, etc.) physiques ou numériques ne sont pas autorisés. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les instruments de dessin sont autorisés. Le barème de correction tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la lisibilité de la copie.

Barème sur 20pts

1 **Question 1** *(Oral du CAPES externe) Enoncez la propriété qui est à l'origine du raisonnement*
2 *par récurrence. Pouvez-vous la démontrer ? Expliquez.*

Question 2 *(Ecrit du CAPESA 2015)*
Si a et b sont deux éléments d'un anneau A qui commutent entre eux, et si n est un entier
3 *naturel, montrer que* $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

2 **Question 3** *Si p est un nombre premier, montrer que :*

$$p \mid ab \;\Rightarrow\; p \mid a \text{ ou } p \mid b.$$

2 *La réciproque est-elle vraie ?*

Question 4 *(Oral du CAPES externe 2006) Soient p un nombre premier et k un entier tel*
3 *que $0 < k < p$. Montrer que, dans ces conditions, p divise le coefficient binomial $\binom{p}{k}$. Cette*
1 *divisibilité reste-t-elle acquise si p n'est plus un nombre premier ?*

Question 5 *(Ecrit du CAPES externe 2013) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^p$. On note A la matrice de u dans la base canonique, et l'on suppose que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*
2 *a) Soit λ une valeur propre complexe de u. Démontrer que $|\lambda| \leq 1$. Montrer ensuite que si*
2 *$|\lambda| = 1$, alors $\lambda = 1$ (on pourra considérer $|\lambda^{n+1} - \lambda^n|$).*
2 *b) Montrer que* $\mathrm{Ker}\,(u - Id) \cap \mathrm{Im}\,(u - Id) = \{0\}$.

FIN DE L'EPREUVE

Université des Antilles et de la Guyane

ESPE de l'ACADEMIE de la GUADELOUPE

Année Universitaire :

MASTER EDUCATION ET FORMATION

DATE DE L'ÉPREUVE : 19-05-2015

SPECIALITE : ______ PARCOURS : MATHS

U.E : ______

ELEMENT CONSTITUTIF : ______

Si votre composition comporte plusieurs feuilles,
Indiquez ici le nombres de feuilles [ ]

PARTIE A RABATTRE

A montrer

NOTE : 04/20

ANNOTATIONS :

Marge réservé à la correction

Question 2

Soit a et b deux elements d'un anneau A qui commutent entre eux, et n un entier naturel.

Montrons que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$

procédons par recurrence

Soit "SP" la relation $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$ × ?

$(a+b)^0 = 0$ $\sum_{k=0}^{0} a^0 b^0 = 0$ vraie au rang 0

$(a+b)^1 = a+b$ et $\sum_{k=0}^{1} a^k b^{n-k} = a^0 b + a b^0 = a+b$

la relation est vraie au rang 1

Supposons la relation "SP" vraie au rang n montrons qu'elle est vraie au rang n+1.

$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$

$= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k+1}$

X! (étourderie) ⟹ a^{k+1}

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n}{\ell-1} a^{\ell} b^{n-\ell+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{k} b^{n-k+1}$$ changement de variable $\ell = k+1$) oui

$$= \binom{n}{0} a^{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]\left(a^{k} b^{n-k+1}\right) + \binom{n}{n} a^{n+1} b^{0}$$

$$= \binom{n}{0} a^{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} a^{k} b^{(n+1)-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^{0}$$

or $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ et $\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n}$

d'où

3/3

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} a^{k} b^{(n+1)-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{0}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} a^{k} b^{(n+1)-k}$$

La relation "1" est donc vraie au rang $n+1$ l'hérédité est donc démontrée.

La relation est vraie pour tout $n \in$ entier

Question 3

p premier

montrons que $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ ou $p \mid b$

0/2

Supposons que p et a sont premiers entre eux on obtient d'après le théorème de Gauss

X! que $p \mid b$ → Et si p n'est premier ni avec a et n[...]

De même si $(p \wedge b) = 1$ Que faire? Cas non envisagé

on aura d'après le théorème de Gauss que $p \mid a$

0/2

la reciproque est vraie A montrer

Question 4

P premier et k entier tel que $0 < k < P$

$$\binom{P}{k} = \frac{P!}{(P-k)!\,k!} = \frac{P \times (P-1) \times (P-2) \times \cdots \times (P-k)}{k \times \cdots \times 1} = \frac{(P-1) \times \cdots \times (P-k)}{k!} \times P$$

~~or p est premier le seul nombre divisible~~

0/3 X! ~~le numerateur est donc~~ divisible par P ~~et car~~ le numerateur est un multiple de P

Cette divisibilité n'est plus acquise quand P n'est pas premier

contre exemple) Oui

i avec b ? é. 1/1

P = 14 et k = 6

$$\binom{14}{6} = \frac{14!}{8!\,6!} = \frac{14 \times \cdots \times 9}{6 \times \cdots \times 2 \times 1} = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}$$

$\binom{14}{6}$ ~~$= 7 \times 13 \times 11 \times$~~

$$\binom{14}{6} = \frac{(7\times2)\times13\times(3\times2\times2)\times11\times(5\times2)\times3\times3}{(3\times2)\times5\times(2\times2)\times3\times2\times1}$$

$$= 7\times13\times11\times9 = 7\times13\times11\times3^2$$

OK

La decomposition en facteur premier de $\binom{14}{6}$ montre qu'elle ne peut pas être divisible par $14 = 7\times2$

vraie au rang n+1

... est vraie

Université des Antilles et de la Guyane

ESPE de l'ACADEMIE de la GUADELOUPE

Année Universitaire :

MASTER EDUCATION ET FORMATION

DATE DE L'ÉPREUVE : 19 Mai 2015

SPECIALITE : MATHS PARCOURS : M1 MEEF

U.E :

ELEMENT CONSTITUTIF : EC 221

PARTIE A RABATTRE

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, Indiquez ici le nombres de feuilles 8

NOTE : 06/20

ANNOTATIONS :

Marge réservé à la correction

QUESTION 3

Montrons que si p premier

et $p|ab \Rightarrow p|a$ ou $p|b$

Montrons la contraposée

Supposons que p ne divise pas a et p ne divise pas b

x !? ... ainsi $PGCD(a,p) = 1$

et $PGCD(b,p) = 1$

d'après le théorème de Bezout

ce n'est pas grâce à Bezout, mais c'est un résultat du cours à rappeler

(1)

②

$\text{pgcd}(a,p) = 1 \iff \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 /$
$au + vp = 1$

et $\text{pgcd}(b,p) = 1 \iff \exists (u',v') \in \mathbb{Z}^2 /$
$bu' + v'p = 1$

$$\begin{cases} au + vp = 1 \\ bu' + v'p = 1 \end{cases}$$

En multipliant membre à membre les deux inégalités on obtient (implication)

$$(au + vp)(bu' + v'p) = 1$$

soit $abuu' + apuv' + bpvu' + p^2vv' = 1$

$\Rightarrow$

$ab\,uu' + p(auv' + bvu' + pvv') = 1$
$\in \mathbb{Z}$ soit k cette valeur

posons $w = uu' \in \mathbb{Z}$

et $k = auv' + bvu' + pvv' \in \mathbb{Z}$

$abw + pk = 1$

d'après le théorème de Bezout (equivalence)

(*) Confusion. MAIS si je passe sur votre première explication (au verso), je peux admettre que $\text{pgcd}(a,p) = 1 = \text{pgcd}(b,p)$ et continuer comme vous le faites. Donc OK.

on peut lire (*)

③

pgcd(ab, p) = 1

2/2 X (donc p ne divise pas ab (rappeler que p premier donc $p \neq 1$)

~~La contraposée~~ étant démontrée on peut donc affirmer que

OK $p|ab \Rightarrow p|a$ ou $p|b$ ou p ne divise

X! ni a ni b

Pourquoi donc rajouter cette phrase qui CASSE tout le raisonnement ?

La RÉCIPROQUE le cas où $p \nmid a$ ni b on montre que p est premier

si $p|a$ ou $p|b$ alors $p|ab$

incomplet X ceci est toujours vrai? que p soit premier ou non

0/2 X! Si je complète, j'obtiens une GRAVE ERREUR

QUESTION 2

Montrons que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

X ~~D~~émontrons le par récurrence

Mal dit X Soit P_n « $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ »

X ~~V~~érifions que P_n est vrai au rang 0 ~~évidente~~

vérifions P_1

$(a+b)^1 = a+b$

; et $\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{n-k} = \binom{1}{0} a^0 b + \binom{1}{1} a^1 b^0 = a+b$

(4)

vraie au rang 1

Supposons la propriété vraie au rang n montrons qu'elle est alors vraie au rang n+1

$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b)$

× en appliquant l'hypothèse de récurrence

$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} (a+b)$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$

Posons $k' = k+1$

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} a^{k'} b^{n-k'+1}$

$= \sum_{k'=1}^{n} \binom{n}{k'-1} a^{k'} b^{n-k'+1} + a^{n+1}$

de plus $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1}$

oui

Ainsi $(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] \times a^k b^{n-k+1}$

or $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

3/3

Soit $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$

N° du Candidat

⑤

U.E E.C

221

Marge réservée à la correction

suite QUESTION 2

la propriété est donc vraie au rang n+1 s'il elle est vraie au rang n.
étant vraie au rang 0 elle est vraie pour tout n.

QUESTION 1

le Raisonnement par récurrence

× On definit une assertion indexée à N elle est vraie ou fausse pour chaque element de N

× appelons le P_n « assertion » $n \in \mathbb{N}$

on vérifie que P_n est vraie au rang $n_1 \in \mathbb{N}$
on suppose qu'elle est vraie à un ? rang n quelconque appartenant à N et on démontre qu'elle est alors vraie au rang suivant (n+1)
On en dedruit qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ à partir de n_1 $(n > n_1)$

A redire autrement, mais idée juste

1/1

Démontrons le

Supposons qu'il existe $n > n_1$ / P_n est fausse

0/2

6

QUESTION 5

a) λ valeur propre de U
démontrons que $|\lambda| \leq 1$

oh! ((λ une valeur propre donc $U(\lambda) - \lambda$)) ? ?

X { oh! de meme $A\lambda = \lambda$

X! $\lim_{n \to +\infty} A^n =$ [illegible] ?

X! | $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \, / \, \forall n \geq N \quad |A^n - \ell| < \varepsilon$ ℓ ne [illegible]

(STOP lecture) en prenant λ on a $|(A\lambda)^n - \ell| < \varepsilon$ [illegible]

Soit $|\lambda^n - \ell| < \varepsilon$

(4)

on $\lambda \in \mathbb{C}$ la suite λ^n converge si et seulement si

$$|\lambda| \leq 1$$

donc la convergence de A^n impose la convergence de $\{\lambda^n$ et donc $|\lambda| \leq 1$

soit $|\lambda| = 1$

λ^n converge donc d'après Cauchy

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n, p \geq N \ |\lambda^p - \lambda^n| < \varepsilon$

en prenant $p = n+1$

$$|\lambda^{n+1} - \lambda^n| < \varepsilon$$

0/6

$|\lambda^{n+1} - \lambda^n| = |\lambda^n(\lambda - 1)| = |\lambda^n| \, |\lambda - 1|$

$= |\lambda|^n |\lambda - 1| = |\lambda - 1|$ car $|\lambda| = 1$

ainsi $|\lambda - 1| < \varepsilon$

cela est vrai quelque soit ε λ étant constante

on en déduit que $\lambda = 1$

eut pas être un réel
ne peut pas être
valeur absolue

⑧

0/4

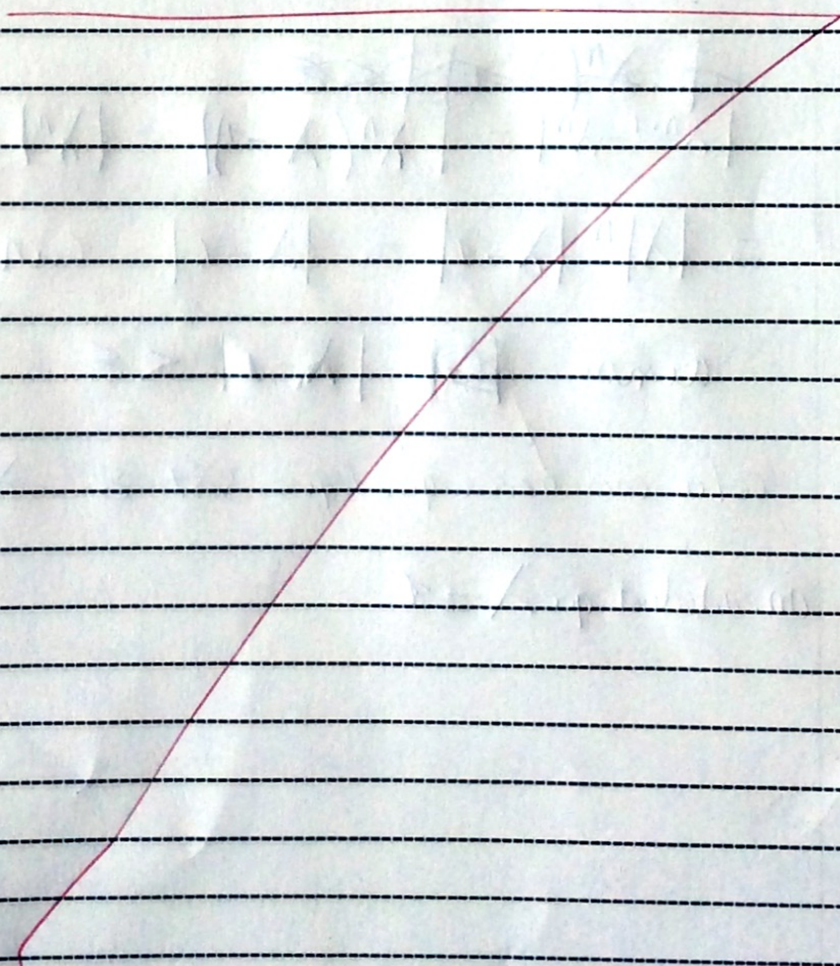
QUESTION 4

soit p un nombre premier

$0 < k < p$ Montrons que $p \mid \binom{p}{k}$

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!\,(p-k)!}$$





Université des Antilles et de la Guyane

ESPE de l'ACADEMIE de la GUADELOUPE

Année Universitaire :

MASTER EDUCATION ET FORMATION

DATE DE L'ÉPREUVE : 19 Mai 2015

SPECIALITE : Maths PARCOURS : PLC

U.E : EC 221

ELEMENT CONSTITUTIF :

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, Indiquez ici le nombres de feuilles

PARTIE A RABATTRE

NOTE : 05/20

ANNOTATIONS :

Marge réservé à la correction

Question 2

Montrons que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Démontrons cela par récurrence

Pour $n=0$, $(a+b)^0 = 1$

$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^0 b^{0-0} = 1$

Donc l'égalité est vraie pour $n=0$.

Supposons qu'elle reste vraie au rang n et démontrons la au rang $n+1$

$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$

$\overset{H.R}{=} (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right)$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$ ..

$l = k+1$

$$= \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^l b^{n+1-l} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

×

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{?} a^{n+1} b^{n+1-n-1}$$

$$+ \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

3/3

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1}$$

JB

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1}$$

$$= \boxed{\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}}$$

× On a donc démontré par récurrence que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Question 3

Soit p un nombre premier.

Montrons que $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ ou $p \mid b$

Supposons que p ne divise pas a et montrons que p divise b.

TB

p premier et $p \nmid a$ alors on a déduit que p et a sont premiers entre eux.
D'où $pgcd(p,a) = 1$.

D'après le théorème de gauss, il existe deux entiers u et v tel que $pu + av = 1$.

D'où $pub + avb = b$. $(*)$

Or $p \mid ab$ donc il existe un entier t tel que $ab = tp$
En remplaçant dans $(*)$, on obtient

$$pub + vtp = b$$

$$\Leftrightarrow b = p(ub + vt)$$

Lourd(!) mais juste (A REVOIR!)

Ceci revient à dire que $p \mid b$.

On a donc démontré que si $p \mid ab$ et $p \nmid a$ alors $p \mid b$.
Dans l'autre cas, on a déjà $p \mid a$.

oui bien vu!

Donc

$$p \mid ab \Rightarrow p \mid a \text{ ou } p \mid b$$

2/2

La réciproque est-elle vraie ?

A-t-on ($p|ab \Rightarrow p|a$ ou $p|b$) $\Rightarrow$ p premier ?

~~[illegible]~~ Démontrons que la réciproque est vraie.

Mal parti (qui sont a et b, traduit-on l'hypothèse, etc.)

X!

Supposons que $p|a$ et $p \nmid b$

$p|a$ alors il existe ~~[illegible]~~ entier t tel que $a = pt$

!

0/2

Donc $ab = ptb$. On déduit que p divise ab.

Donc nécessairement p est premier car sinon il s'écrirait comme ~~[illegible]~~ produits de facteurs premiers et on ne pourrait pas avoir $p|ab$

Donc p premier.

L'autre cas où $p \nmid a$ et $p|b$ est identique.

Donc la réciproque est vraie.

Question 4

Soient p un nombre premier et k un entier tel que $0 < k < p$.

0/4

Montrons que, dans ces conditions, p divise le coefficient binomial $\binom{p}{k}$.

X!

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = p\,\frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}$$

Gros problème

n'est pas forcément dans $\mathbb{Z}$

Université des Antilles et de la Guyane

ESPE de l'ACADEMIE de la GUADELOUPE

Année Universitaire :

MASTER EDUCATION ET FORMATION

DATE DE L'ÉPREUVE : 19 mai 2015

SPECIALITE : PARCOURS : Maths

U.E :

ELEMENT CONSTITUTIF :

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, Indiquez ici le nombres de feuilles 1

PARTIE A RABATTRE

$\sum \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n-k+1}$

$\binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1}$

NOTE : 03/20

ANNOTATIONS :

Marge réservé à la correction

Question 1

Soit P une propriété indexée par n raisonner par récurrence c'est demontré que P(n) est vrai pour tout entier naturel n, en démontrant deux choses :

X

→ Initialisation : on vérifie que la propriété est vrai au rang premier

→ Hérédité : On suppose P(n) vrai et on montre que P(n+1) est vrai

X

Question 2

Considérons la propriété

$$P(n) : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

et raisonnons par recurrence.

* Initialisation

Pour $n=0$

$(a+b)^0 = 1$

et $\sum \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$

donc c'est vrai

* Hérédité

Supposons $P(n)$ vrai et montrons $P(n+1)$.

$(a+b)^n(a+b) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} (a+b)$

$\Leftrightarrow (a+b)^n(a+b) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k}$

$+ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$

Posons $j = k+1$

$\Leftrightarrow (a+b)^{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n-j+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$ TB

$\Leftrightarrow (a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^j b^{n-j+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1}$

$\Leftrightarrow$ $(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n-k+1}$

3/3

$\Leftrightarrow$ $(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1}$

TB

(à part les équivalences mal placées) Etaient-elles utiles?

$\Leftrightarrow$ $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$ est vrai.

Question 3

Si p est premier et est premier avec a alors le Théorème de Gauss nous permet de dire que $p|b$
De même si p premier est premier avec b alors ce même théorème nous permet de dire que $p|a$.

Et si p n'est premier ni avec a ni avec b. X! Tous les cas ne sont pas envisagés. 0/2

La reciproque est vrai. Démontrons la :

Si $p|a$, alors $\exists q \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kp$

et $ab = kpb$, comme p divise kpb donc $p|ab$

ou Si $p|b$, alors $\exists q' \in \mathbb{Z}$ tel que $b = pq'$ et on a $ab = pq'a$

Comme $p|pq'a$ donc $p|ab$

Ainsi la réciproque est démontrée

0/2

X! C'est la réciproque de l'affirmation "complète" qui était demandée, pas celle-ci qui est triviale.

Question 4

Soient p un nombre premier et k un entier tel que $0 < k < p$

$p \mid p(p-1)\times(p-2)\times \dots \times(p-k)$

0/3

Comme p est premier et est premier avec l'un des facteurs alors p divise chacun des facteurs ainsi $p \mid p!$ et donc p divise le coefficient binomial $\binom{p}{k}$ d'après le Théorème de Gauss

oh! X!

0/1

Si p n'est pas premier alors la divisibilité n'est pas acquise).

Contre-exemple à donner.

Question 5

Université des Antilles et de la Guyane

ESPE de l'ACADEMIE de la GUADELOUPE

Année Universitaire :

MASTER EDUCATION ET FORMATION

DATE DE L'ÉPREUVE : 19 mai 2015

SPECIALITE : Maths PARCOURS : 2nd degré

U.E :

ELEMENT CONSTITUTIF :

Si votre composition comporte plusieurs feuilles,
Indiquez ici le nombres de feuilles

PARTIE A RABATTRE

donc 11 est
Mais 1 n'est pas
...sible par p.

NOTE : 01/20

ANNOTATIONS :

Marge réservé à la correction

Question 2:

Nous allons raisonner par récurrence. Soit $P(n)$ la propriété de récurrence:

$$P(n) : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Initialisation :

Pour $n=0$,

$$(a+b)^0 = 1$$

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = 1$$

donc $P(n)$ vraie pour $n=0$.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie, montrons que $P(n+1)$ vraie.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$$

$$= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

b

X!

0/3

$$(a+b)^{n+1} = b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b^{n+1} \cdot a^{n-k} + a \cdot b^{n} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{k} \cdot b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{k} b^{(n+1)-k}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{P}(n)$ vraie.

Question 3 :

P est un nombre premier donc il est divisible par 1 et par p. Mais 1 n'est pas premier, alors ab est divisible par p. Puisque

$P | ab \Rightarrow p | a$ ou p / b

$ab = p \times q$

mais la réciproque est fausse)) Ah bon !

gros problème → X! Tous les nombres entiers vérifient cela !

X! Raisonnement magique.

X!

Question 4 :

$p \mid \binom{n}{k} \odot \binom{n}{k} = p \times q$

a^{n+1} ?

X ? ?

0/3

ex :

$0 < 2 < 5$

$\binom{p}{k} = \binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$ et $5 | 10$

Expliquez !

?

1/1

ex :

$0 < 2 < 6$

$\binom{p}{k} = \binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$ et $6 \nmid 15$

A mettre en valeur. Expliquer plus !

cette divisibilité ne reste pas acquise si p n'est plus un nombre premier.

Là, c'est moi qui doit chercher, où est votre contre-exemple, le premier ex. ou le second ?

Normalement, dans le doute, le correcteur doit choisir la solution défavorable. Ici cela n'a pas été fait

Université des Antilles et de la Guyane

ESPE de l'ACADEMIE de la GUADELOUPE

Année Universitaire :

MASTER EDUCATION ET FORMATION

DATE DE L'ÉPREUVE : 19 mai 2015

SPECIALITE : Mathématiques PARCOURS : PLC

U.E : EC 132

ELEMENT CONSTITUTIF :

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, Indiquez ici le nombres de feuilles 2

PARTIE A RABATTRE

NOTE : 11/20

ANNOTATIONS :

Marge réservé à la correction

VB

Question 2.

Montrons par récurrence sur n que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Initialisation pour n = 0

$(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = a^0 b^0 = 1$.

$(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k}$ vrai

Supposons que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ vrai jusqu'à un certain rang n.

Hérédité : $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b)$

$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right)(a+b)$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$

$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$

$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + a^{n+1} + b^{n+1}$

$$= \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) + a^{n+1} + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + a^{n+1} + b^{n+1}$$

3/3

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

Ainsi on a démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

exercice 3

(1.)

Si p est un nombre premier, montrons que

$p|ab \Rightarrow p|a$ ou $p|b$.

• Si p ne divise pas a donc p est premier avec a car tout nombre premier est premier avec les nombres qu'il ne divise pas.

TB

2/2

Ainsi on a $p|ab$ et $p \wedge a = 1$ Donc d'après le théorème de Gauss $p|b$.

• De même si p ne divise pas b, d'après le théorème de Gauss on a $p|a$.

La réciproque est vrai:

Manque d'explication ici : que fait

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^*$

Soit $p = ab$, Si $p|a$ alors $\exists k$, $a = kp$

X

donc $p = ab \Leftrightarrow p = pkb$

$\Leftrightarrow 1 = kb$

$\Leftrightarrow b = \pm 1$

ainsi $p = \pm a$

0,5/2

- Si $p | b$ alors $\exists k$ tel que $b = kp$

donc $p = ab \Leftrightarrow p = pka$

$\Leftrightarrow 1 = ka$

$\Leftrightarrow a = \pm 1$

donc $p = \pm b$

X ainsi on a bien p premier. A expliquer

exercice 4

Montrons que si p premier et k un entier tel que $0 < k < p$ alors p divise $\binom{p}{k}$

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!\,(p-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \binom{p}{k} = \frac{p \times (p-1) \times \dots \times (p-k+1)}{k!}$$

$$\Leftrightarrow k!\binom{p}{k} = p \times \underbrace{(p-1) \times \dots \times (p-k+1)}_{k'}$$

2,5/3

donc $k!\binom{p}{k} = k'p$

Ainsi on a $p \mid k!\binom{p}{k}$

Or $0 < k < p$, p ne divise aucun des facteurs de $p!$ et comme p est premier, p est premier avec tout nombre qu'il ne divise pas ainsi $p \wedge k! = 1$

Donc on a $p \mid k!\binom{p}{k}$ et $p \wedge k! = 1$ donc d'après le théorème de GAUSS $p \mid \binom{p}{k}$. oui

X Problème : On ne dit pas que p ne divise pas k' ici

…tes-vous ?

. La divisibilité ne reste pas acquise si p n'est plus un nombre premier.

Contre-exemple :

Soit $p = 6$, 6 est divisible par 3 et par 2, donc p n'est pas premier. Soit $k = 4$ on a bien $0 < 4 < 6$.

TB

1/1

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 3 \times 5 = 15$$

et on constate que 6 ne divise pas 15.

Question 5.

. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^p$

. A la matrice de u dans la base canonique.

. $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

1 – λ est valeur propre complexe de u.

Soit X le vecteur propre associé à la valeur propre λ.

On a $AX = \lambda X$

$\Leftrightarrow A^n X = \lambda^n X$

or $A^n X$ converge donc $\lambda^n X$ converge

ce qui est vrai si et seulement si

$0 < \lambda < 1$ donc si $|\lambda| \leq 1$

X

1/2

X

Saut d'étapes importants (par ex. où on utilise que $X \neq 0$)

• Supposons que $|\lambda| = 1$

Considérons $|\lambda^{n+1} - \lambda^n|$.

On a : $|\lambda^{n+1} - \lambda^n| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ Non démontré ! A justifier complètement

X!

1/2

N° du Candidat

20900096

U.E E.C

EC 132

Marge réservée à la correction

V4

On $|\lambda^{n+1} - \lambda^n| = |\lambda^n(\lambda - 1)|$

$= |\lambda^n| \, |\lambda - 1|$

$= |\lambda|^n \, |\lambda - 1|$

$= 1 \times |\lambda - 1|$

$= |\lambda - 1|$

On $|\lambda^{n+1} - \lambda^n| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

donc $|\lambda - 1| = 0$ alors $\lambda = 1$

0/2

b)

Université des Antilles et de la Guyane

ESPE de l'ACADEMIE de la GUADELOUPE

Année Universitaire :

MASTER EDUCATION ET FORMATION

DATE DE L'ÉPREUVE : 19/05/2015

SPECIALITE : Mathématique PARCOURS : M1 Math

U.E :

ELEMENT CONSTITUTIF :

Si votre composition comporte plusieurs feuilles, Indiquez ici le nombres de feuilles 1



NOTE : 03/20

ANNOTATIONS :

Marge réservé à la correction

Question 3 :

Si p est premier montrons que $p/ab \Rightarrow p/a$ ou p/b.

Si p et a sont premier entre eux alors on a que p ne divise pas a donc p va diviser b. première solution.

Si p et b sont premier entre eux alors on a que p ne divise pas b donc p va diviser a. deuxième solution

X! erreur raisonnement

0/4

Dernier cas non envisagé : lorsque p non premier avec a et non premier avec b

Question 2:

X Pour montrer cette démonstration nous utiliserons le raisonnement par récurrence.

Initialisation:

Posons $n=0$

$(a+b)^0 = 1.$

$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1.$ donc vraie au rang n.

Supposons que cela soit vraie au rang n, montrons que cela est aussi vraie au rang n+1.

$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b)$

PAS ICI X! $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1}.$

$(a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b$

Posons $l = k+1$

$= \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^l b^{n+1-l} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^{n+1-k}$ X

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n+1} a^{n+1}$$ X!

$$+ \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1}$$

3/3

Malgré les X!, surtout la première.

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

Donc cela est vraie pour tout n.

Exercice 4 :

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$$

$$\frac{\binom{p}{k}}{p} = \frac{\frac{p!}{k!(p-k)!}}{p} = \frac{p!}{k!(p-k)!} \times \frac{1}{p}.$$

0/4

On sait que $p! = 1 \times \cdots \times p$

donc on a que p divise le coeficient binomiale

$-k+1$

oubli de a^k